

# Lokales und globales Differenzieren (vgl. LS11, Kapitel II)

## (1) Differenzenquotient, mittlere Änderungsrate

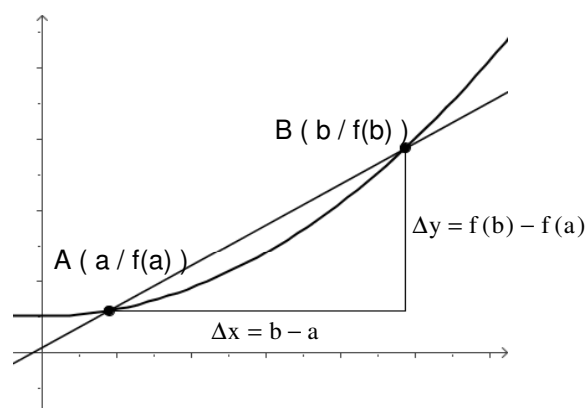
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  heißt der **Differenzenquotient** oder die **mittlere**

**Änderungsrate** der Funktion  $f$  im

Intervall  $[a; b]$ .

Anschaulich entspricht  $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  der Steigung der Sekante

durch die Graphenpunkte  $(a / f(a))$  und  $(b / f(b))$ .



Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  heißt, falls er existiert, **Differentialquotient** oder **lokale (momentane) Änderungsrate**

oder **Ableitung der Funktion  $f$**  an der Stelle  $x_0$ .

Anschaulich entspricht dies der Steigung der Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0 / f(x_0))$ . Diese Tangentensteigung wird als **Steigung des Graphen** im Punkt  $(x_0 / f(x_0))$  bezeichnet.

## (2) Differenzierbarkeit

Wenn eine Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$

die lokale Änderungsrate  $f'(x_0)$

besitzt, heißt sie an der Stelle  $x_0$

**differenzierbar**. Ist sie an allen

Stellen aus einem Intervall  $I$

differenzierbar, so nennt man sie **auf**

**$I$  differenzierbar**.

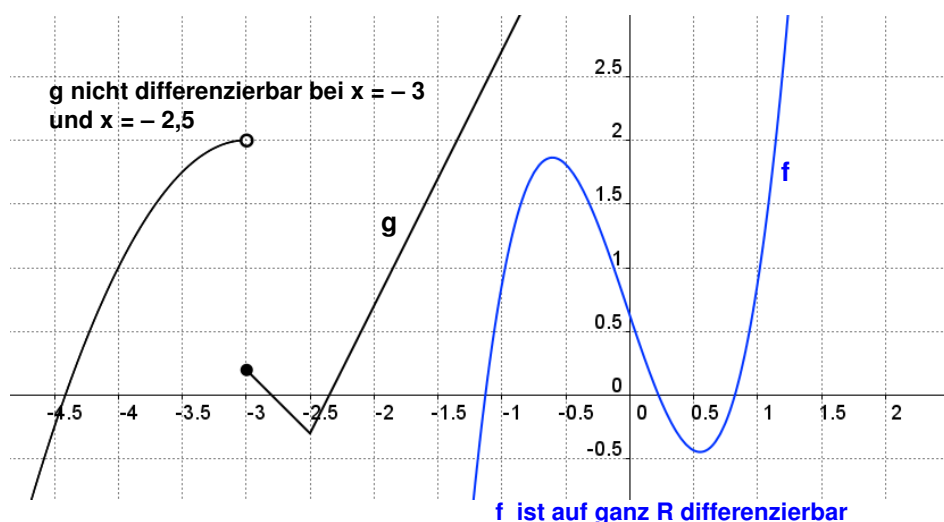
Gegenbeispiel: Betragsfunktionen

sind an der Stelle des Knicks nicht

differenzierbar, Funktionen mit

Sprung an der Sprungstelle nicht

differenzierbar.



## (3) Ableitungsfunktion, Stammfunktion

Zu einer Funktion  $f$  heißt die Funktion  $f'(x)$  die Ableitungsfunktion oder kurz Ableitung von  $f$ .

Eine Funktion  $F$  heißt eine Stammfunktion der Funktion  $f$ , wenn  $F'(x) = f(x)$  gilt. Alle Stammfunktionen einer Funktion  $f$  unterscheiden sich nur um eine additive Konstante, ihre Graphen sind also lediglich zueinander in  $y$ -Richtung verschoben.

## (4) Ableitungsregeln

Potenzfunktionen:  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Summenregel:  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Faktorregel:  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

Produktregel:  $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel:  $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

Kettenregel:  $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

## Beispiel-/Übungsaufgaben

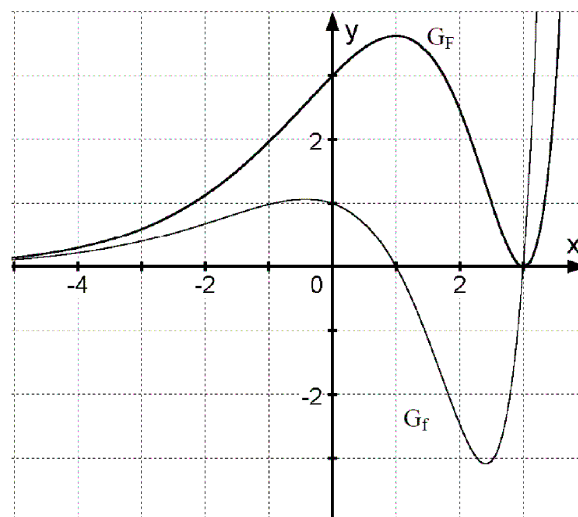
1. Berechnen Sie für die Funktion  $f$  die mittlere Änderungsraten  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  und  $m_4$  in den Intervallen

$$I_1 = [-1; 0], I_2 = [0; 1], I_3 = [1; 3], I_4 = [0; 3].$$

a)  $f(x) = x^2 - 2$       b)  $f(x) = \frac{12}{x+2}$

2. Das Schaubild zeigt den Graphen  $G_f$  einer in ganz  $\mathbb{R}$  definierten, stetigen Funktion  $f$  und den Graphen  $G_F$  einer Stammfunktion von  $F$  von  $f$ .

Erläutern Sie, dass das dargestellte Monotonieverhalten von  $G_F$  sowie das dargestellte Krümmungsverhalten von  $G_F$  in Einklang damit stehen, dass  $F$  Stammfunktion von  $f$  ist.  
(Hinweis: Die Frage nach dem Krümmungsverhalten beinhaltet Stoff der 12. Jahrgangsstufe)



3. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  an der Stelle  $x = 1$

4. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion!

a)  $f(x) = (x^3 - 2x - 1)(x^2 + 3)$

b)  $g(x) = \frac{6x}{15 - x^2}$

c)  $h(x) = \ln(x) \cdot e^x + \frac{\ln x}{e^x}$

5. Für welchen Werte des Parameters  $a$  besitzen die entsprechenden Funktionen der Schar  $f_a(x) = a^2 x \cdot e^{-x^2}$ ,  $a \neq 0$ , in ihrer Nullstelle die Steigung 2?

## Lösungen

1.

a)  $f(x) = x^2 - 2$  ;  $D = \mathbb{R}$

$$m_1 = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{-2 + 1}{1} = -1 ; \quad m_2 = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{-1 + 2}{1} = 1$$

$$m_3 = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{7 + 1}{2} = 4 ; \quad m_4 = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{7 + 2}{3} = 3$$

b)  $f(x) = \frac{12}{x+2}$  ;  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ |
| -6    | -2    | -0,8  | -1,2  |

## 2. Monotonie:

$$F' = f' > 0 \Rightarrow F \text{ streng monoton wachsend}$$

$$f' > 0 \text{ für } x \in ]-\infty; 1[ \text{ und } x \in ]3; \infty[$$

$\Rightarrow F$  ist in diesen Intervallen streng monoton wachsend

$$F' = f' < 0 \Rightarrow F \text{ streng monoton fallend}$$

$$f' < 0 \text{ für } x \in ]1; 3[$$

$\Rightarrow F$  ist in diesem Intervall streng monoton fallend

## Krümmung:

$$F'' = f'' > 0 \Rightarrow F \text{ ist links gekrümmt}$$

Wir untersuchen die Steigung von  $f'$ :

$$f'' > 0 \text{ für } x \in ]-\infty; x^{\max}[ \text{ und } x \in ]x^{\min}; \infty[$$

$\Rightarrow F$  ist in diesen Intervallen links gekrümmt

$$F'' = f'' < 0 \Rightarrow F \text{ ist rechts gekrümmt}$$

$$f'' < 0 \text{ für } x \in ]x^{\max}; x^{\min}[$$

$\Rightarrow F$  ist in diesen Intervallen rechts gekrümmt

bei  $x^{\max}$  und  $x^{\min}$  hat  $F$  Wendepunkte

$$3. \quad f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x+1) \cdot 1 - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Berechne die y-Koordinate des ersten Berührungpunktes:  $f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow P_1\left(1/\frac{1}{2}\right)$

Berechne die Steigung des Graph an der Stelle  $x = 1$ :  $f'(1) = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \frac{1}{4}$

Ansatz für die Tangente:  $y = m \cdot x + t$

Setze die Koordinaten des Punktes und die Steigung ein:  $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot 1 + t \Rightarrow t = \frac{1}{4}$

Tangente 1:  $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

4. a)  $f'(x) = (3x^2 - 2)(x^2 + 3) + (x^2 - 2x - 1) \cdot 2x$

b)  $g'(x) = \frac{6 \cdot (15 - x^2) - 6x \cdot (-2x)}{(15 - x^2)^2} = \frac{90 - 6x^2 + 12x^2}{(15 - x^2)^2} = \frac{90 + 6x^2}{(15 - x^2)^2}$

c)  $h(x) = \ln(x) \cdot e^x + \frac{\ln x}{e^x} \quad h'(x) = \frac{1}{x} \cdot e^x + \ln(x) \cdot e^x + \frac{\frac{1}{x} \cdot e^x - \ln(x) \cdot e^x}{e^{2x}}$

5. Nullstelle:  $a^2 x \cdot e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (die e-Funktion ist für jeden Exponenten immer positiv)

Gefragt ist also nach der Steigung bei  $x = 0$ .

$$f_a'(x) = a^2 \cdot e^{-x^2} + a^2 x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2} \cdot (a^2 - 2a^2 x^2)$$

$$f_a'(0) = e^0 \cdot (a^2 - 0) = a^2 \stackrel{!}{=} 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{a_{1,2} = \pm\sqrt{2}}}$$